2 平稳分布

定义6.4.2 称概率分布$\{\pi_j, j\in S\}$是齐次马氏链X的一个平稳分布，如果有

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}, \qquad j\in S$$

或矩阵形式为

$$\pi=\pi\mathrm{P}$$

其中$\pi=\{\pi_1,\pi_2,\cdots\}$，$\mathbf{P}=(p_{ij})$为X的转移概率矩阵。

显然 若概率分布$\{\pi_j, j \in S\}$是马氏链X的平稳分布

则也有

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}, \quad j \in S, n = 1, 2, \cdots$$

或矩阵形式为

$$\pi = \pi P^n$$

定理6.4.3 设 $\{\pi_i, i\in S\}$ 是齐次马氏链 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 的一个平稳分布，如果取 $\{\pi_i, i\in S\}$ 为 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 的初始分布，即 $P(X_0=i)=\pi_i$，$i\in S$,

(1) 则对任意的正整数n，都有

$$P(X_n=i)=\pi_i,\quad i\in S,$$

证明： (1) $P(X_n=i)=\sum_{k\in S}P(X_0=k)P(X_n=i\mid X_0=k)$

$$=\sum_{k\in S}\pi_k p_{ki}^{(n)}=\pi_i \qquad i\in S$$

(2)并且对任意的正整数**n**，**m**,以及

$$\forall 0 \le t_1 < \cdots < t_n \text{和} \forall i_1, i_2, \cdots, i_n \in S, \text{有}$$

$$P(X_{t_1+m} = i_1, X_{t_2+m} = i_2, \cdots, X_{t_n+m} = i_n)$$

$$= P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)$$

证明 (2) $P(X_{t_1+m} = i_1, X_{t_2+m} = i_2, \cdots, X_{t_n+m} = i_n)$

$$= P(\bigcup_{i_0 \in S} (X_0 = i_0), X_{t_1+m} = i_1, X_{t_2+m} = i_2, \cdots, X_{t_n+m} = i_n)$$

$$=\sum_{i_0\in S}P(X_0=i_0,X_{t_1+m}=i_1,X_{t_2+m}=i_2,\cdots,X_{t_n+m}=i_n)$$

$$=\sum_{i_0\in S}\pi_{i_0}p_{i_0i_1}^{(t_1+m)}p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}$$

$$=\pi_{i_1}p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}$$

$$=P(X_{t_1}=i_1)P(X_{t_2}=i_2\,|\,X_{t_1}=i_1)\cdots P(X_{t_n}=i_n\,|\,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})$$

$$=P(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n)$$

定理说明：若马氏链存在平稳分布,则以平稳分布作为初始分布,就有以下结论：

（1）马氏链的绝对分布是确定的,保持不变.

（2）该马氏链是一个严平稳时间序列.

思考：一个重要的问题:

齐次马尔可夫链是否存在平稳分布?

如果存在，是否唯一? 如何计算?

按照以下情况分别讨论

- 不可约的遍历链
- 不可约的正常返的马氏链
- 一般的齐次马氏链

➢齐次马尔可夫链是不可约的遍历链

设X=$\{X_n, n=0,1,\cdots\}$是不可约的遍历链，则X存在唯一的极限分布$\{\pi_j = \dfrac{1}{\mu_{jj}}, j \in S\}$.

且此时的极限分布就是平稳分布.

平稳分布可通过求解下列方程组得到

$$\begin{cases} \pi_j = \sum\limits_{k \in S} \pi_k p_{kj}, \quad j \in S \\ \sum\limits_{k \in S} \pi_k = 1 \end{cases}$$

例 1 设状态空间为**S={0,1,2,}**的马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

试分析它的极限分布，平稳分布是否存在？并计算

解 易知此链为不可约遍历链.

故极限分布存在，平稳分布存在唯一，且平稳分布就是其极限分布。

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_0 = \frac{21}{62} \quad \pi_1 = \frac{23}{62} \quad \pi_2 = \frac{18}{62}$$

$$\Rightarrow \pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\frac{21}{62}, \frac{23}{62}, \frac{18}{62})$$

例2 设齐次马尔可夫链的状态空间S={0,1,2,3,4},其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

分析平稳分布存在？并计算

解 易知是不可约链,且为遍历链.

故其平稳分布存在且唯一.

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_0 = \frac{1}{31} \quad \pi_1 = \frac{2}{31} \quad \pi_2 = \frac{4}{31} \quad \pi_3 = \frac{8}{31} \quad \pi_4 = \frac{16}{31}$$

平稳分布为 $\pi = \{\frac{1}{31}, \frac{2}{31} \frac{4}{31}, \frac{8}{31}, \frac{16}{31}\}$

➢齐次马尔可夫链是不可约的正常返链

定理6.4.4 设 $X=\{X_n, n=0,1,\cdots\}$是不可约齐次马氏链其状态空间S中的每个状态都是正常返状态.

则X有唯一的平稳分布:$\{\pi_j=\dfrac{1}{\mu_{jj}}, j\in S\}$.

平稳分布通过求解方程组

$$\begin{cases}\pi_j=\sum\limits_{k\in S}\pi_k p_{kj}, \quad j\in S\\ \sum\limits_{k\in S}\pi_k=1\end{cases}$$

1） 先证$\{\pi_j,\ j\in S\}$满足方程组$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij},\quad j\in S$

对任意正整数n, 由C-K方程, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m+1)}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}\Big)=\sum_{k\in S}\Big(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}^{(m)}\Big)p_{kj}$$

令$n\to\infty$, 由法都引理以及引理6. 4. 1

$$\pi_j\ge\sum_{k\in S}\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}^{(m)}\Big)\ p_{kj}=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}$$

而上式对一切$j \in S$等号成立.

因此对于一切j成立有 $\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj} \quad j \in S$

2） 再证$\{\pi_j,\ j\in S\}$满足$\sum_{j\in S}\pi_j=1.$

反复利用 $\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}$ 可以得到

$$\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}=\sum_{k\in S}(\sum_{i\in S}\pi_i p_{ik})p_{kj}=\cdots=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}$$

即有 $$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}$$

令$n\to\infty$，并由$\sum_{j\in S}\pi_j\le 1$以及$p_{ij}^{(n)}$一致有界，得

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in S}\pi_i(\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)})=(\sum_{i\in S}\pi_i)\,\pi_j$$

$$\Rightarrow\sum_{i\in S}\pi_i=1$$

3） $\{\pi_j,\ \ j\in S\}$唯一性的证明与6. 4. 2类似.

➢一般齐次马尔可夫链X

定理6.4.5 设X的状态空间$S=D\bigcup C_0\bigcup C_1\bigcup\cdots$ 其中D是非常返状态集，C_0是零常返状态集，$\boldsymbol{C_m(m=1,2,\cdots)}$是正常返状态的不可约闭集，记$\boldsymbol{H}=\bigcup_{k\geq 1}\boldsymbol{C_k}$，则

（1）X不存在平稳分布的充要条件是H=Φ

（2）X存在唯一平稳分布的重要条件是只有一个正常返的不可约闭集。

（3）X存在无穷多个平稳分布充要条件是至少存在两个以上正常返的不可约闭集。

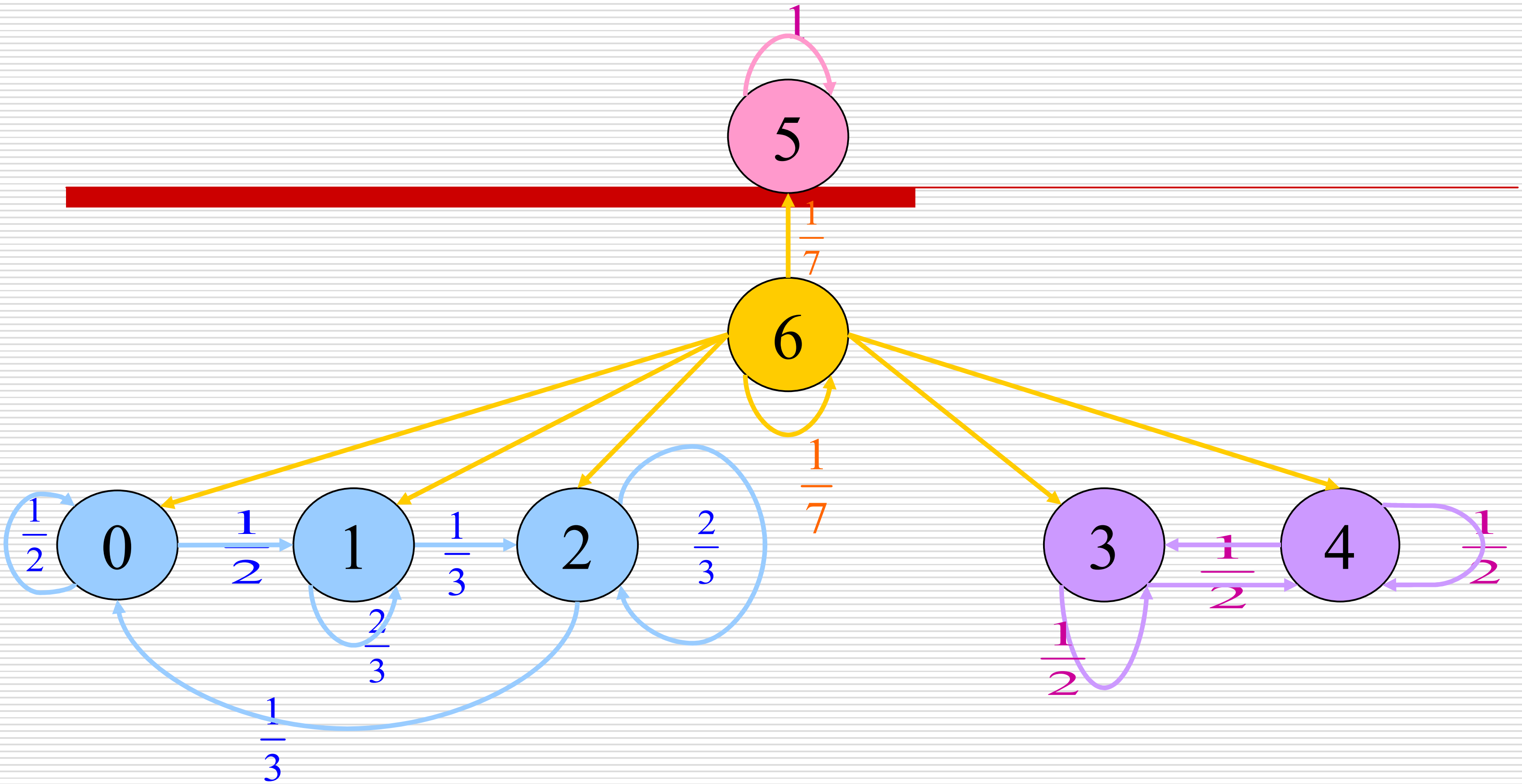
例3 设有状态空间S={0,1,2,3,4,5,6}的齐次马尔可夫链其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

(1)试对S进行分类，并说明各状态类型

(2) 求平稳分布，其平稳分布是否唯一？为什么？

(3) 求 $P(X_{n+2}=1 \mid X_n=0), P(X_{n+2}=2 \mid X_n=0)$



(1) $S = D \cup C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$

$= \{6\} \cup \{0,1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5\}$

(2) 由**(1)**知,该链有三个不同的正常返不可约闭集

所以平稳分布不唯一

三个闭集对应的转移概率矩阵分别为

$$P_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad P_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad P_3=(1)$$

解方程组

$$\begin{cases} \pi^{(1)}=\pi^{(1)}P_1 \\ \pi_1^{(1)}+\pi_2^{(1)}+\pi_3^{(1)}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi^{(2)}=\pi^{(2)}P_2 \\ \pi_1^{(2)}+\pi_2^{(2)}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi^{(3)}=\pi^{(3)}P_3 \\ \pi_1^{(3)}=1 \end{cases}$$

$$\pi^{(1)}=\left\{\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8}\right\} \qquad \pi^{(2)}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\} \qquad \pi^{(3)}=\{1\}$$

平稳分布为 $\pi=\left\{\frac{2\lambda_1}{8},\frac{3\lambda_1}{8},\frac{3\lambda_1}{8},\frac{\lambda_2}{2},\frac{\lambda_2}{2},\lambda_3,0\right\}$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\geq 0$$

(3) $P(X_{n+2}=1 \mid X_n=0)=p_{01}^{(2)}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$$

$P(X_{n+2}=2 \mid X_n=0)=p_{02}^{(2)}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

作业： 2, 4, 8, 9, 11,(2)(4) ,12, 13,(1)(4), 19.